

Bijlage kansberekeningen.

Globale berekening van de kans dat acht groeven op het beeldje van St. Geertruid toevallig twee V's en één tri-line vormen.

ir. M.Meulenberg, augustus 2011.

Inleiding.

Op het beeldje van St. Geertruid staan acht groeven die gemaakt lijken te zijn door te schrapen. Sporen van botsen of hakken ontbreken. Het kunnen dus graveringen zijn, maar ook toevallige schampsporen en krassen.

Het doel van onderstaande berekening is te onderzoeken of de acht groeven toevallig een patroon kunnen vormen met twee V-symbolen en één tri-line. Indien de kans daarop verwaarloosbaar klein blijkt te zijn, bewijst dit dat de groeven, voor tenminste een deel, opzettelijk zijn gemaakt. Er is dan sprake van een beeldje.

De kansberekeningen zijn indicatief. Verwaarloosbaar klein of niet. Daarom vind ik het toelaatbaar, waar nodig schematiseringen en vereenvoudigingen aan te brengen.

De belangrijkste vereenvoudiging is, dat bij de berekeningen het overlappen van de drie symbolen en de resterende lange groeve, gemakshalve niet is uitgesloten. Door deze vereenvoudiging zijn de berekende kansen feitelijk te groot.

Voorts wordt bij de berekeningen gedaan, alsof er geen niet graveerbaar oppervlak aanwezig is, maar slechts een graveerbare cortex op een bolvormige steen. De werkelijkheid is complexer en stelt meer beperkingen aan de ruimte waar graven mogelijk is. Ook door deze vereenvoudiging zijn de berekende kansen feitelijk te groot.

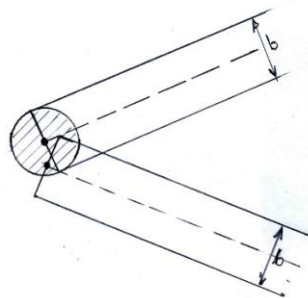
Par.1: Enkele algemene uitgangspunten voor de berekeningen.

De grootte van het graveerbare oppervlak (de cortex) van de vuursteen is bij alle berekeningen van belang.



Het graveerbaar oppervlak van de vuursteen bedraagt ca. hoogte x gemiddelde omtrek = $h \times \pi \times d = 65 \text{ mm} \times \pi \times 30 \text{ mm} = 6.123 \text{ mm}^2$. Afgerond 6000 mm²

Voor het berekenen van de kans dat een V-symbool wordt gevormd, is het nodig een schematisering te maken van de punt van de V en eisen te stellen aan de hoek waaronder de zijden van de V elkaar mogen snijden.



De grootte van de "punt" van een V symbool.

Het gaat hier om de grootte van het gebied waar de groeven die een V vormen, samenkomen.

Ik ben hiervoor uitgegaan van een cirkel met een diameter gelijk aan de breedte (b) van de groeven. Zie tekening hiernaast. Het punt van de middellijn dat het begin van één der groeven markeert, heeft de ruimte om binnen deze cirkel elke positie in te nemen. Het oppervlak van de cirkel bedraagt $\pi \times (b/2)^2$.

Er moeten ook eisen gesteld worden aan de hoek waaronder twee groeven elkaar snijden, opdat een V-vorm wordt gemaakt. Keuze: er is sprake van een V, indien de zjden van de V elkaar snijden onder een hoek van minimaal 20 graden en maximaal 50 graden. Als de eerste groeve gemaakt is, moet de tweede groeve hier dus een hoek mee maken van + 20 tot + 50 graden of - 20 tot - 50 graden.

Par. 2. Berekening van de kans dat de drie lange groeven toevallig een V-symbool vormen

Deze groeven hebben gemiddeld een breedte b van 3 mm.

Het opp. van de punt van een V die ze kunnen vormen bedraagt $\pi \times (b/2)^2 = \pi \times (1,5)^2 = \text{ca. } 7 \text{ mm}^2$.

Het graveerbaar opp. van de steen bedraagt 6000 mm^2 .

De kans dat de beginpunten van groeven a en b beiden in hetzelfde punt (van de V) liggen, bedraagt $7 \text{ mm}^2 / 6000 \text{ mm}^2 = \text{ca. } 1/860$.

Twee groeven kunnen aan de einden op meerdere wijzen in een punt samen komen. Niet slechts door samenvallen van de beginpunten, maar ook door samenvallen van de eindpunten of door samen vallen van een beginpunt en een eindpunt. Er zijn in totaal vier mogelijkheden. Daardoor wordt de kans twee groeven van 3 mm breed aan de einden samenvallen $4/860 = 1/215$.

De kans dat de groeven a en b elkaar onder de juiste hoek snijden bedraagt $2 \times 30 \text{ graden} / 360 \text{ graden} = 1/6$.

De kans dat de lange groeven a en b samen een V symbool vormen bedraagt $1/215 \times 1/6 = 1/1290$.

Het zelfde geldt voor de kans dat groeve a en c of groeve b en c een V symbool vormen.

De kans dat de drie lange groeven een V symbool vormen bedraagt daardoor $3 \times 1/1290 = 1/430$.

Par. 3: Berekening van de kans dat twee of vijf korte groeven toevallig een V symbool vormen.

Deze groeven hebben gemiddeld een breedte b van 2 mm.

Het opp. van de punt van de V die ze kunnen vormen bedraagt $\pi \times (b/2)^2 = \pi \times (1)^2 = 3,14 \text{ mm}^2$. Naar boven afgerond 4 mm^2 .

Het graveerbaar opp. van de steen bedraagt 6000 mm^2 .

De kans dat de beginpunten van twee groeven a en b beiden in hetzelfde punt (van de V) liggen, bedraagt $4 \text{ mm}^2 / 6000 \text{ mm}^2 = 1/1500$.

Twee groeven kunnen aan de einden op meerdere wijzen in een punt samen komen. Niet slechts door samenvallen van de beginpunten, maar ook door samenvallen van de eindpunten of door samen vallen van een beginpunt en een eindpunt. Er zijn in totaal vier mogelijkheden. Daardoor wordt de kans twee groeven van 2 mm breed aan de einden samenvallen $4/1500 = 1/375$.

De kans dat de groeven a en b elkaar onder de juiste hoek snijden bedraagt $2 \times 30 \text{ graden} / 360 \text{ graden} = 1/6$.

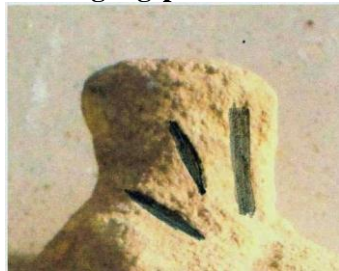
De kans dat twee korte groeven a en b samen een V- symbool vormen bedraagt dus $1/375 \times 1/6 = 1/2250$.

Vijf groeven kunnen tien V symbolen vormen. Uit groeven $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, $b+c$, $b+d$, $b+e$, $c+d$, $c+e$ en $d+e$.

De kans dat de vijf korte groeven één V symbool vormen bedraagt daardoor $10 \times 1/2250 = 1/225$.

Par. 4: Berekening van de kans dat drie of vijf korte groeven toevallig een tri-line vormen.

Dit is een complexere berekening als de voorgaande. Voorafgaand aan de berekening is het nodig de eisen te formuleren waaraan de groeven van het tri-line symbool moeten voldoen.

4a: Uitgangspunten voor de berekening

Aan de plaats van de middelste (eerste) groeve op het beeldje worden geen eisen gesteld. Evenmin aan de richting van deze eerste groeve

Aan de groeven links en rechts van de middelste groeve (de zijgroeven) moeten wel eisen worden gesteld, omdat je in de 3 groeven een tri-line symbool moet kunnen herkennen.

Kansberekeningen zijn dus slechts nodig voor de (tweede en derde) groeven ter weerszijde van de middelste groeve.

- Voor alle groeven ga ik uit van een gelijke lengte ℓ van 10 mm. De kleine lengteverschillen tussen de drie groeven van de tri-line op het beeldje worden verwaarloosd.

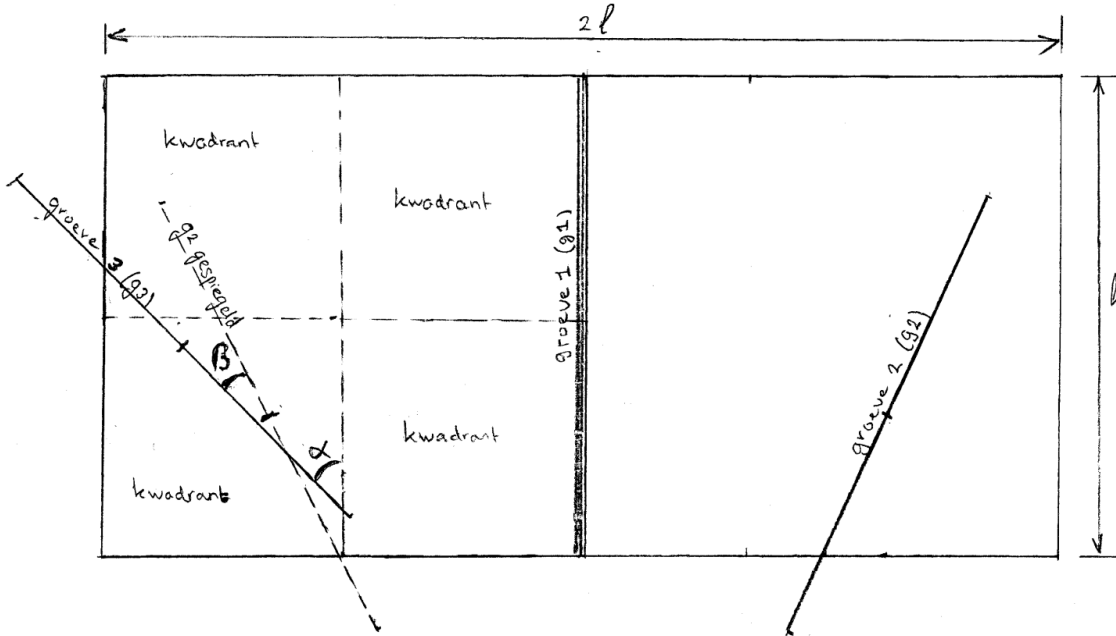
4c: Berekening van de kans dat de derde groeve van de tri-line aan de eisen voldoet.

Voor groeve 3 gelden deels dezelfde eisen als voor groeve 2.

Er zijn twee verschillen:

- groeve 3 moet altijd aan de andere kant van de middelste groeve liggen dan groeve 2.
- Bovendien moet het midden van groeve 3 in hetzelfde kwadrant liggen als het midden van groeve 2 gespiegeld.

De kans dat groeve 3 aan deze eisen qua voldoet, is een factor 8 kleiner dan de kans dat groeve 2 aan alle eisen voldoet en wordt $1/8 \times 1/73 = 1/584$.



Groeve 3 moet qua richting t.o.v. “groeve 2 gespiegeld”, ook aan bepaalde eisen voldoen.

- Hoek β mag niet te groot zijn en moet liggen tussen 20° en -20° .

De kans dat groeve 3 aan deze eisen voor hoek β voldoet, bedraagt $40/180 = 1/4,5$

De kans dat groeve 3 aan bovenstaande eisen voldoet wordt dan $1/584 \times 1/4,5 = 1/2628$

De eisen die in par. 4b aan de hoek tussen groeve 2 en groeve 1 werden gesteld, gelden ook voor de hoek α tussen groeve 3 en groeve 1. Daardoor wordt in sommige gevallen hoek β meer beperkt dan bovenstaand is genoemd.

Gemakshalve heb ik dit in de berekeningen niet meegenomen.

Door deze vereenvoudiging is de berekende kans feitelijk iets te groot.

4d: Berekening van de kans dat 3 of 5 korte groeven toevallig een tri-line vormen.

De kans dat de 3 groeven samen een tri-line vormen bedraagt $1/73$ (zie par. 4b) $\times 1/2628$ (zie par. 4c) = $1/192.000$.

Afgerond 1/200 duizend.

Als er vijf groeven zijn waaruit een tri-line kan worden gevormd, zijn er uiteraard veel meer mogelijkheden dan bij vorming van de tri-line uit 3 groeven a, b en c.

Er zijn tien combinaties van groeven mogelijk in plaats van één: a+b+c; a+b+d; a+b+e; a+c+d; a+c+e; a+d+e; b+c+d; b+c+e; b+d+e en c+d+e.

De kans dat 5 groeven samen een tri-line vormen bedraagt dan $10 \times 1/192.000 = 1/19.200$.

Afgerond 1/20 duizend.

Par. 5: Berekening van de kans dat meerdere symbolen worden gevormd.

De kans dat 5 korte groeven een V-symbool en een tri-line vormen is onderstaand op twee manieren berekend.

Als eerst een V uit 5 groeven wordt gevormd en daarna een tri-line uit de resterende 3 groeven, bedraagt de kans op vorming van beide symbolen:

$$1/225 \text{ (vorming V uit 5 korte groeven)} \times 1/192.000 \text{ (vorming triline uit resterende 3 korte groeven)} = 1/43.200.000.$$

Als eerst een tri-line uit 5 groeven wordt gevormd en daarna een V uit de resterende 2 groeven, bedraagt de kans op vorming van beide symbolen:

$$1/19.200 \text{ (vorming triline uit 5 korte groeven)} \times 1/2.250 \text{ (vorming V uit resterende 2 korte groeven)} = 1/43.200.000.$$

De kans dat 5 korte groeven toevallig een V-symbool en een tri-line vormen is dus 1/43.200.000.

Afgerond: 1 op 40 miljoen

De kans dat uit de drie lange groeven één V symbool bedroeg 1/430 (par. 2)

De kans dat uit de drie lange groeven één V symbool wordt gevormd en uit de vijf korte groeven één V symbool + één tri-line, bedraagt: $1/430 \times 1/43.200.000 = 1/18.600.000.000$.

Afgerond een kans van 1/20 miljard..

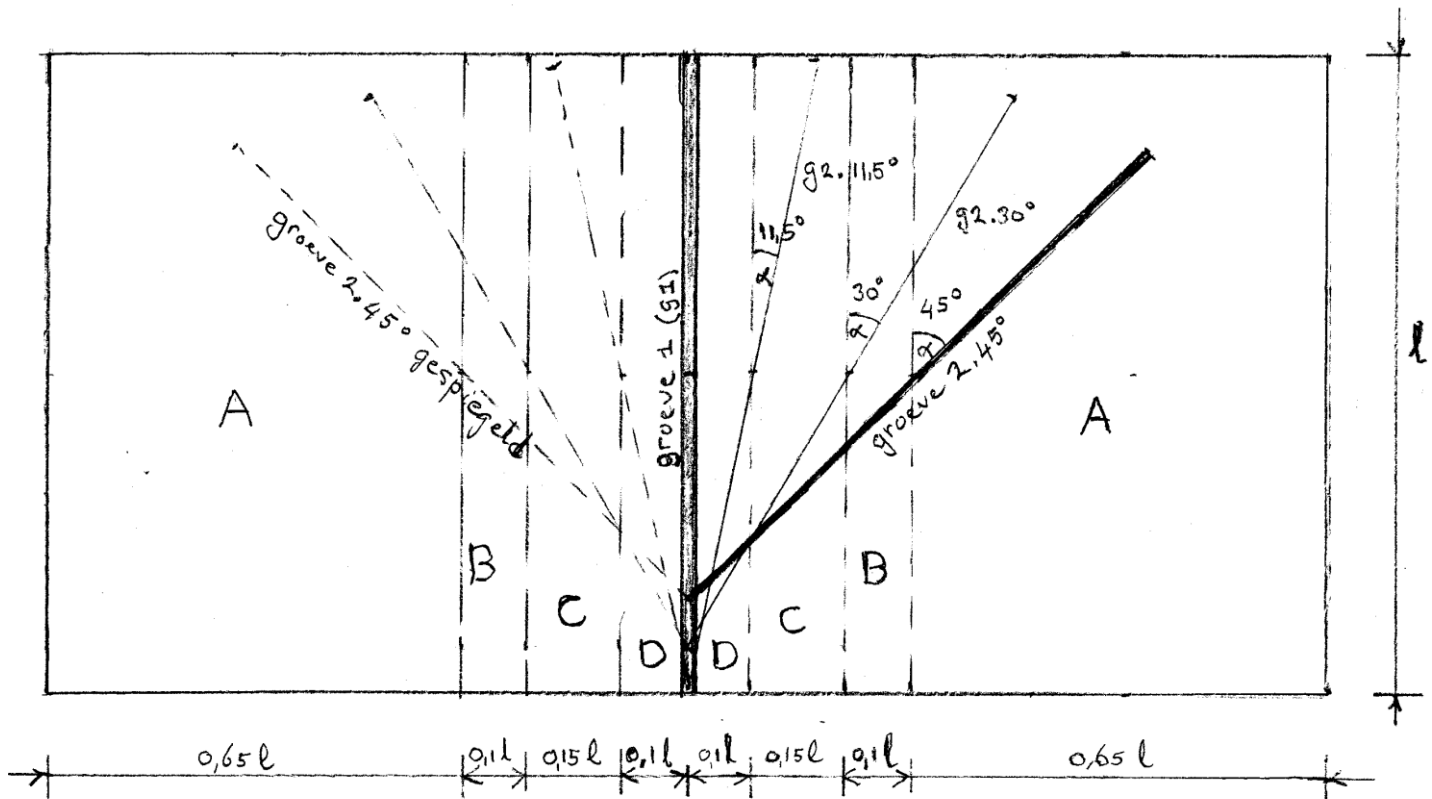
Par. 6: Samenvatting.

In onderstaande tabel zijn alle berekende kansen samengevat.

beschouwde groeven	kans dat beschouwde groeven toevallig een V vormen	kans dat beschouwde groeven toevallig een tri-line vormen	kans dat beschouwde groeven toevallig een V en een tri-line vormen	kans dat beschouwde groeven toevallig twee V's en een tri-line vormen
3 lange groeven	1/430 (par. 2)			
5 korte groeven	1/225 (par. 3)	1/200 duizend (par. 4d)	1/40 miljoen (par. 5)	
3 korte groeven				
5 korte groeven	1/2250 (par. 3)	1/20 duizend (par. 4d)	1/40 miljoen (par. 5)	
2 korte groeven				
3 lange + 5 korte groeven				1/20 miljard (par. 5)

Een vereenvoudigde, leesbaarder tabel is onderstaand weergegeven.

beschouwde groeven	symbool of symbolen	kans dat de groeven het symbool (de symbolen) toevallig vormen
drie lange groeven	liggende V	1 : 430
twee korte groeven	kleine V	1 : 2250
drie korte ploegsporen	tri-line	1 : 200.000
vijf korte groeven	kleine V + tri-line	ca. 1 : 40 miljoen
drie lange + vijf korte groeven	liggende V + kleine V + tri-line	ca. 1 : 20 miljard



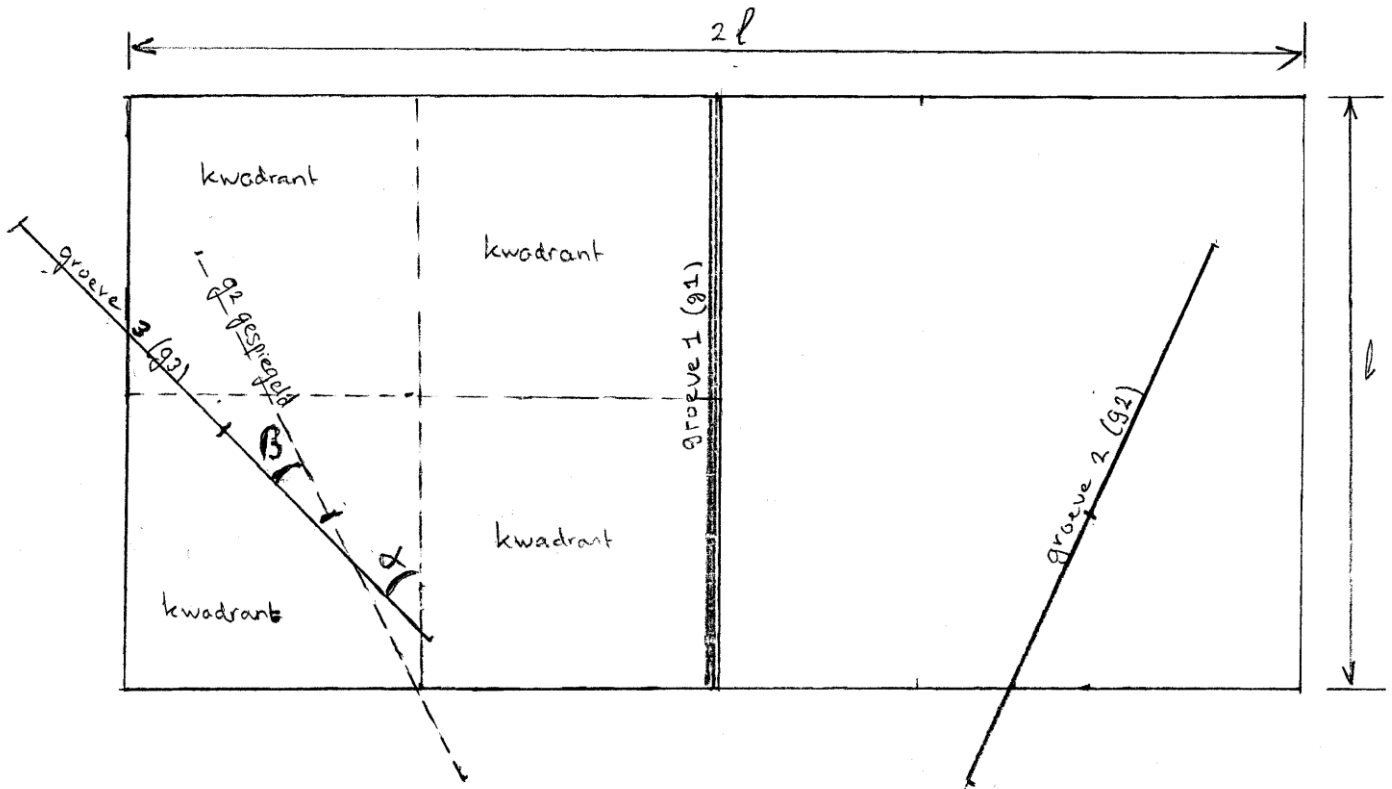
- De drie groeven van de tri-line hebben alle een lengte l .
- Het midden van alle groeven moet steeds binnen bovenstaande rechthoek met zijden l en $2 l$ liggen.

De middellijn van deze rechthoek wordt gevormd door de middelste groeve van de tri-line (groeve 1). Voor de kansberekeningen worden zowel rechts als links van groeve 1, vier gebieden onderscheiden: A, B, C en D, waarin het midden van de 2^e groeve van de triline kan liggen.

De groeven 1 en 2 mogen elkaar niet snijden. Dit betekent dat hoek α tussen zijgroeve 2 en groeve 1 kleiner moet worden naarmate de groeven dichter bij elkaar liggen.

Voor elk van deze gebieden A, B, C en D worden daarom verschillende eisen aan hoek α gesteld.

- In de gebieden A (rechts en links van de middelste groeve) geldt overal de α max. 45° en minimum -45° mag zijn.
- In de gebieden B geldt dat α max. 30° tot 45° en min. -30° tot -45° mag zijn.
- In de gebieden C geldt dat α max. $11,5^\circ$ tot 30° en min. $-11,5^\circ$ tot -30° mag zijn.
- In de gebieden D geldt dat α max. 0° tot $11,5^\circ$ en min. -0° tot $-11,5^\circ$ mag zijn.



- Voor groeve 3 gelden deels dezelfde eisen als voor groeve 2 (zie bijlage 1).

Omdat er een zekere symmetrie tussen groeve 2 en 3 moet zijn, zijn er enkele verschillen en aanvullende eisen. In het optimale geval valt groeve 3 samen met groeve 2 gespiegeld. De afwijking van dit optimum mag niet al te groot zijn. Praktisch goed hanteerbare aanvullende eisen zijn:

- groeve 3 moet altijd aan de andere kant van de middelste groeve liggen dan groeve 2.
- Het midden van groeve 3 moet in hetzelfde kwadrant liggen als het midden van groeve 2 gespiegeld.
- Hoek β tussen groeve 3 en groeve 2 gespiegeld mag maximaal 20° bedragen en minimaal -20° .

Grenzen die aan de hoek tussen groeve 2 en groeve 1 worden gesteld, gelden ook voor de hoek α tussen groeve 3 en groeve 1. Daardoor wordt in sommige gevallen ook hoek β meer beperkt dan bovenstaand is genoemd. Gemakshalve heb ik dit in de berekeningen niet meegenomen. Door deze vereenvoudiging is de berekende kans feitelijk iets te groot.